(V, B) B 双线性型.

$\dim V = n$. 取 V 的一组基 $v_1 \cdots v_n$. ← 记为 C

$G = (B(v_i, v_j))_{n\times n}$ 唯一确定了 B.

Gram matrix.

如何唯一确定 B.?

$B(v, w)$ $v, w \in V$

$[v]_C = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $[w]_C = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, $w = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot v_j$

$$\begin{aligned} B(v, w) &= B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_j \cdot B(v_i, v_j) \\ &= (x_1 \cdots x_n) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= ([v]_C)^T \cdot G ([w])_C \end{aligned}$$

$\boxed{B(w,v) = B(v,w)}$ 对称性.

$$\underbrace{([v]_c)^T G ([w])_c}_{\displaystyle \| \atop \displaystyle [w]_c^T \cdot G^T \cdot [v]_c} = ([w]_c)^T G [v]_c$$

性质: B 对称 $\Leftrightarrow$ $G = G^T$

内积: 对称正定双线性型. $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$

$B(v,v) > 0, \ \forall v \neq 0$

V 有标准正交基 (G-S)

考虑, $\{ T: V \to V$ 线性 $\mid B(T(v), T(w)) = B(v,w) \ \forall v, w \in V \}$

$= O(V)$ 正交变换.

例子: $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$. $T(v) = A \cdot v$

$O(\mathbb{R}^n, \langle . \rangle) = O(n) = \{ A \mid AA^T = I \}$

性质：$C=\{v_1,\cdots v_n\}$ 是 V 的标准正交基，

则 $\underline{T\in O(V)} \Leftrightarrow \underline{[T]_C^C} \in O(n)$

证明：$\forall\ v, w\in V$，$[T(v)]_C = [T]_C^C \cdot [v]_C$

$[v]_C = x$，$[w]_C = y$，$[T]_C^C = A$.

$$B(v, w) = x^T\cdot I\cdot y = x^T y$$

$$B(T(v), T(w)) = (Ax)^T\cdot I(Ay) = x^T(A^TA)y$$

$$T\in O(V) \Leftrightarrow x^Ty = x^T(A^TA)y.$$

$$\Leftrightarrow A^TA = I.$$

推论：$T\in O(V)$，T 可逆，$T^{-1}\in O(V)$

$T.S\in O(V)$，$T\circ S\in O(V)$

Pf: $B(T^{-1}(v), T^{-1}(w)) = B(T(T^{-1}(v)), T(T^{-1}(w)))$

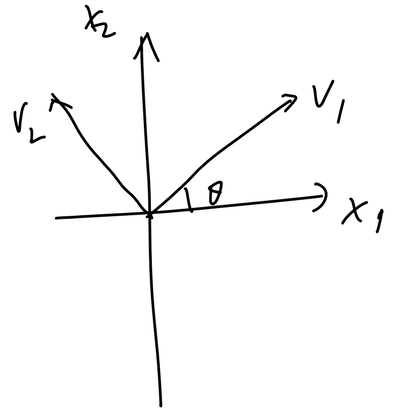
$= B(v, w)$

$\Rightarrow T^{-1}\in O(V)$

分类： $\dim V = 1.$ $O(1) = \{\pm 1\}$

$\dim V = 2$ $O(2)$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \end{array}}_{\text{逆时针转}\theta.}, \ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \right\}$$



$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

characteristic polynomial

$$f(\lambda) = \lambda^2 - 0\cdot\lambda + \det A$$
$$= \lambda^2 - 1$$
$$= (\lambda+1)(\lambda-1)$$

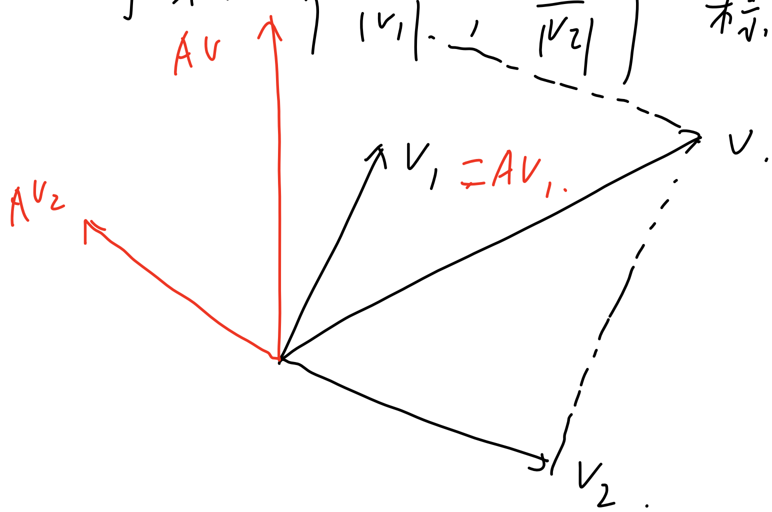
A 可对角化. 有两个 eigenvector v_1, v_2. 组成 $\mathbb{R}^2$ 的基. $Av_1 = v_1$

$Av_2 = -v_2$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle Av_1, Av_2 \rangle = \langle v_1, -v_2 \rangle$$
$$= -\langle v_1, v_2 \rangle$$

$\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0.$

可取 $\left\{ \frac{v_1}{|v_1|}, \frac{v_2}{|v_2|} \right\}$ 标准正交基



反射.

以 v_1 为镜面

以 v_2 为法向量.

一般的 $T \in O(V)$. $(A \in O(n))$

希望作归纳

性质: $W \subset V$ T-不变子空间, 即 $T(W) \subset W$

则 $W^\perp = \{ v \in V \mid B(v, w) = 0, \ \forall w \in W \}$

$(W \oplus W^\perp = V)$ 也是 T 不变的.

Pf: $\forall w \in W$, $v \in W^\perp$.

$B(T(v), w) = B(T(v), T \cdot (T^{-1}(w)))$

$= B(v, T^{-1}(w))$

$T|_W : W \to W$, $T|_W$ 单射 $\Rightarrow$ 满射

双射.

$T^{-1}|_W : W \to W$, $T^{-1}(w) \in W$.

$\Rightarrow B(T(v), w) = 0$

在 $\mathbb{C}$ 上, $T: V \to V$. 线性变换, T 总有 $\dim = 1$ 的不变子空间. ($f(\lambda) = 0$ 有根. 特征向量)

$\boxed{\text{在 } \mathbb{R} \text{ 上 不一定}}$

$\underline{A \in O(n)}$ A 有复特征根 $\lambda \in \mathbb{C}$

有复特征向量 $v \in \mathbb{C}^n$

$\boxed{A \cdot v = \lambda v}$

$\Downarrow$

$\lambda = a + b\sqrt{-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$v = v_1 + \sqrt{-1}\, v_2$.

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$.

$A \cdot (v_1 + \sqrt{-1} v_2) = (a + b\sqrt{-1}) \cdot (v_1 + \sqrt{-1}\, v_2)$

$||$

⇓

$$\underline{Av_1} + \sqrt{-1}\,\underline{Av_2} = \underline{(av_1 - bv_2)} + \sqrt{-1}\,\underline{(bv_1 + av_2)}$$

$$\underline{A(v_1, v_2)} = \underline{(v_1, v_2)} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathrm{span}(v_1, v_2)}$ 是 A-不变子空间.

(有 $\mathrm{span}(v_1, v_2)$, $v_1, v_2 \in V$,

W 是 T 不变的)

记作 W, $\dim W = 1$, or 2.

(注: 与 $\mathbb{R}$ 上不可约多项式 $\deg \le 2$)

且 $\langle w_1, w_1 \rangle = 1$

$\dim W = 1$. 有 w_1 是 A 的特征向量

特征值 $= \pm 1$.

$[\pm 1]$

$\dim W = 2$. 有 $\{w_1, w_2\}$ 是 W 的标准正交基.

$$A\cdot(w_1,w_2)=(w_1,w_2)\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

或者 $\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$

$T\in O(V)$

定理：存在标准正交基 $C:\{v_1,\dots,v_n\}$

$$[T]_C^C=\begin{bmatrix}\begin{matrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{matrix} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1\end{bmatrix}$$

$A\in O(n)$，存在 $P\in O(n)$

$P^{-1}AP=$

旋转（定义） $V=W\oplus W^{\perp}$.

$\dim W=2$. v_1,v_2 标准正交基.

$T:W\to W$ 有矩阵

$$T(v_1,v_2)=(v_1,v_2)\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

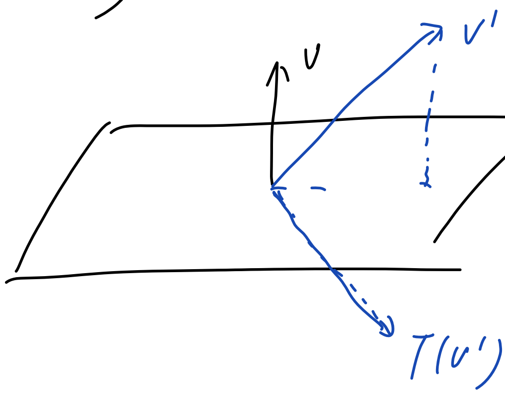
$T: W^{\perp} \to W^{\perp}$ 恒等变换.

$T: V \to V$ 是平面 W 上的旋转.

反射(定义)

$W \subset V$, $\dim V = n$

$\dim W = n-1$



$T: W \to W$ 恒等

$v \perp W$, $v \neq 0$

$T(v) = -v$

(T 有一个重数为 -1 的特征值, 其余特征值为 1)

$O(3)$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ \hline & & -1 \end{array}\right]$$

$2+1$

← 旋转复合上反射

$\det A = 1$

全是旋转.

$$\left[\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ \hline & & 1 \end{array}\right]$$

旋转

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & \\ & -1 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$ 旋转

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$ 反射.

性质: $\mathbb{R}^3$ 中两个反射的复合是旋转.

实自伴, 对称, 线性变换.

(self-adjoint. symmetric)

定义: (V, B). 内积. $T: V \to V$.

满足 $\boxed{B(v, T(w)) = B(T(v), w)}$

性质: 在标准正交基 $C: \{v_1 \ldots v_n\}$ 下

T symmetric $\Leftrightarrow$ $[T]_C^C = A$ 是对称阵

$A^T = A$.

Pf: $[v]_C = x$, $[w] = y$,

$$\begin{cases} B(v, T(w)) = x^T \cdot (Ay) \\ B(T(v), w) = (Ax)^T y = x^T A^T y. \end{cases}$$

$x^T(Ay) = x^T A^T y$ 对任意 $x \cdot y \in \mathbb{R}^n$ 成立

$\Leftrightarrow A = A^T$.

例: $\dim = 1$. $T: V \to V$. $A = (a)$

$\dim = 2$. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

$$f(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2) = 0$$

$$\Delta = (a+c)^2 - 4(ac - b^2)$$

$$= (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

$\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$

case 1: $\Delta > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. A 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化.

$A v_1 = \lambda_1 v_1$. $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$.

$A v_2 = \lambda_2 v_2$

$$\langle v_1, Av_2\rangle = \langle Av_1, v_2\rangle$$

$$\lambda_1 \langle v_1, v_2\rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2\rangle$$

$$\langle v_1, v_2\rangle = 0.$$

存在标准正交基 w_1, w_2

$\mathbb{R}^2$

$$A(w_1, w_2) = (w_1, w_2) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Case 2:

$\Delta = 0$, $a = c$, $b = 0$

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

归纳基础:

性质: T symmetric. $W \subset V$ T-不变子空间.

则 $W^\perp$ 也 T-不变.

Pf: $\forall$ $v \in W^\perp$, $w \in W$

$$B(T(v), w) = B(v, T(w))$$
$$= 0.$$

$\Rightarrow T(v) \in W^\perp$.

类似，$T: V \to V$ 实线性变换

T 一定有 $W \subset V$ 不变子空间

$\dim W = 1$ or 2.

归纳知:

性质: T symmetric, 则存在 V 的标准正交基 $C = \{v_1 \cdots v_n\}$

$$[T]_C^C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$ (正交对角化)

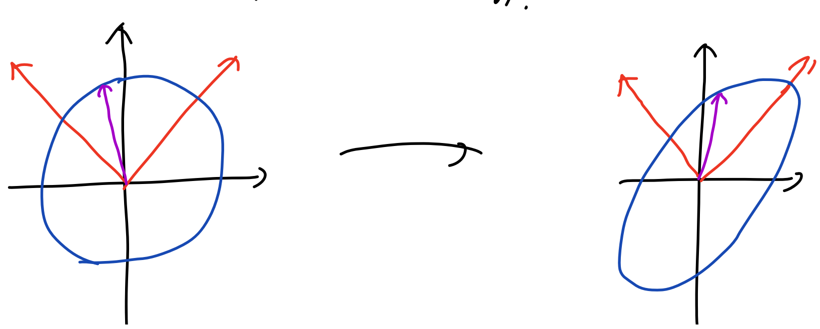
($A = A^T$, 存在 $P \in O(n)$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$)

可对 $v_1 \cdots v_n$ 重新排序，使得

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \cdots \geq \lambda_n$.

几何:



$$\langle Av_1, v_1 \rangle = \max \{ \langle Av, v \rangle \mid |v| = 1 \}.$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i. \qquad [v]_c = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$|v| = 1$, 则 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

$$\langle Av, v \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

$$\leq \lambda_1. \quad (x_1 = 1,\ x_2 = \cdots = x_n = 0 \text{ 取等号})$$

考虑, $\{ v \in \mathbb{R}^n \mid |v| = 1 \}$. 有界闭集.

函数 $\langle v, Av \rangle$ 有最大值, 在 v_1 处取得.

可证明 v_1 是特征向量.

考虑, $\dfrac{\langle v, Av \rangle}{\langle v, v \rangle}$ 对一般 $v \neq 0$